

קורס קדם במתמטיקה למתודים

פרק 19 - חשבון דיפרנציאלי - פונקציה הערך מוחלט

תוכן העניינים

1	. כתיבה וסדרות של פונקציות ערך מוחלט
6	. תחום הגדרה של פונקציות עם ערך מוחלט
7	. גזירה של פונקציות עם ערך מוחלט
10	. חקירה של פונקציות עם ערכים מוחלטים
14	. פתרון וחקירה של משוואות עם ערך מוחלט

כתיבה וסדרות של פונקציה ערך מוחלט:

סיכום כללי:

$$\text{פונקציה הערך המוחלט מוגדרת: } f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

כדי לשרטט פונקציות עם ערך מוחלט, או שמכילות ביטויים עם ערכים מוחלטים, יש לעקוב אחר השלבים הבאים:

1. יש למצוא את הנקודות שמאפסות את כל אחד מהערכים המוחלטים.
2. יש לחלק את הפונקציה לתחומים עבור כל האפשרויות הקיימות.
3. עבור כל תחום יש לכתוב את הפונקציה המתקבלת ללא סימן הערך המוחלט ולשרטט אותה במערכת צירים.

הערה:

ניתן להיעזר בטכниקה אלגברית בסיסית על מנת לפשט פונקציות בטרם הניתו והשרות שלhn כגון: $f(x) = x^2|x| - 3|x| = |x|(x^2 - 3)$.

שאלות:

1) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = |x+4| - |4x| + 1$.
כתבו את הפונקציה ללא סימן הערך המוחלט, כפונקציה מוגדרת למקוטען.

2) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = 3x - |x+3|$.
כתבו את הפונקציה ללא סימן הערך המוחלט, כפונקציה מוגדרת למקוטען.

שרטט את הפונקציות הבאות במערכת צירים:

$$f(x) = |x+2| \quad (4)$$

$$f(x) = |x| - 1 \quad (3)$$

$$f(x) = |x-1| + |2-x| - 3 \cdot |x+1| + x \quad (6)$$

$$f(x) = |2x+1| + |x-3| \quad (5)$$

$$f(x) = x|x| \quad (8)$$

$$f(x) = 2|x| + x \quad (7)$$

$$f(x) = |x^2 + 6x - 8| \quad (10)$$

$$f(x) = x^2 + 2|x| - 3 \quad (9)$$

$$f(x) = (x-3)|x+1| \quad (12)$$

$$f(x) = x^3 - |x| \quad (14)$$

$$f(x) = 2x^2|x| - 7x|x| + 3|x| \quad (16)$$

$$f(x) = -2x|x| + |7x| - 5 \quad (11)$$

$$f(x) = |9x - x^3| \quad (13)$$

$$f(x) = |x|^3 - 4x^2 \quad (15)$$

17) לפניך הפונקציה: $f(x) = 6x - 2x^2$

א. סרטט את $f(x)$ במערכת צירים.

ב. סרטט בהאותה מערכת הצירים את $g(x) = 6|x| - 2x^2$

ג. הוסף למערכת הצירים את גרף הפונקציה: $h(x) = |6|x| - 2x^2|$

18) לפניך הפונקציה: $f(x) = 9x^2 - 8x - 1$

מגדירים: $h(x) = 9x^2 - 8|x| - 1$ ו $g(x) = 9|x| - 8x - 1$.

א. סרטט במערכת צירים אחת את הפונקציות $g(x)$ ו $h(x)$.

ב. סרטט במערכת צירים חדשה את הפונקציה $|h(x)|$.

19) נתונות הפונקציות הבאות: $g(x) = \frac{x}{|x|}$ ו $f(x) = \frac{|x|}{x}$

האם המשוואות הנ"ל מייצגות את אותה הפונקציה?
אם כן – הסבר וסרטט את גרף הפונקציה, אם לא – נמק.

20) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות $g(x) = |x+1| + |x-2|$, $f(x) = |x^2 - 4|$:

21) לפניך הפונקציות הבאות: $g(x) = |(x-5)(x+4)|$, $f(x) = |(x-2)(x+4)|$

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

ב. כיצד תשתנה התוצאה אם במקום $g(x)$ ניקח: $?h(x) = |(x-5)(x-4)|$

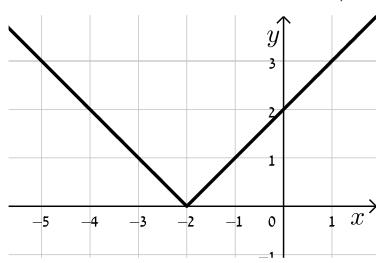
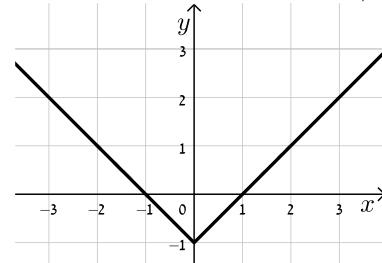
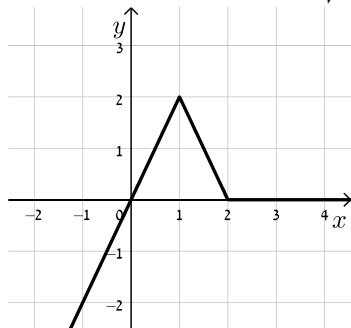
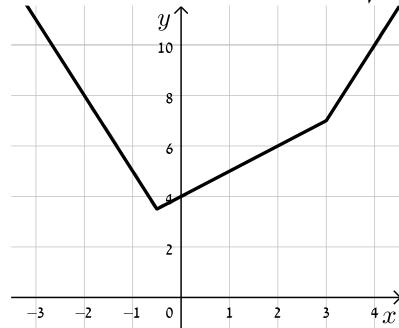
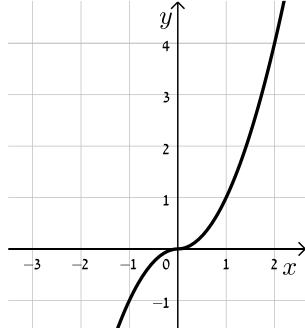
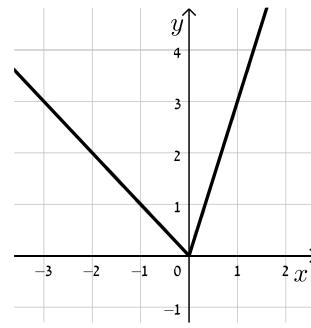
22) נתונות הפונקציות: $(a \neq 0)$, $g(x) = ax^2 - 1$ ו $f(x) = |x|x + 3|$

מצא עבור כלו ערכי a הגрафים נחתכים בשתי נקודות, נקודה אחת ולא נחתכים כלל.

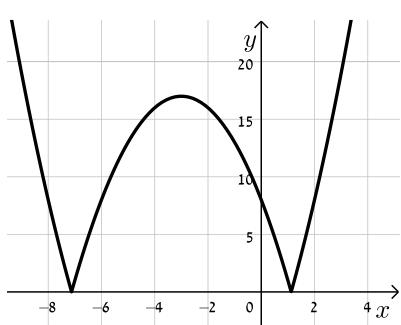
תשובות סופיות:

$$\cdot f(x) = |x+4| - |4x| + 1 = \begin{cases} -3x+5 & x \geq 0 \\ 5x+5 & -4 \leq x < 0 \\ 3x-3 & x < -4 \end{cases} \quad (1)$$

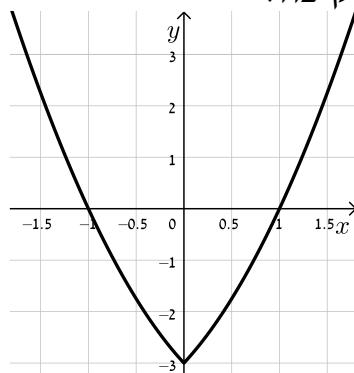
$$\cdot f(x) = 3x - |x+|3-x|| = \begin{cases} x+3 & x \geq 3 \\ 3x-3 & x < 3 \end{cases} \quad (2)$$

להלן סקיצות של הפונקציות:**(4) סקיצה:****(3) סקיצה:****(6) סקיצה:****(5) סקיצה:****(8) סקיצה:****(7) סקיצה:**

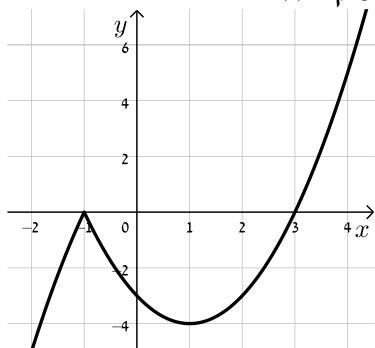
(10) סקיצה :



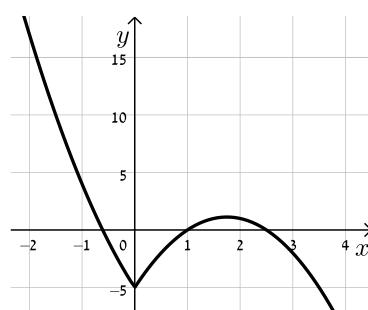
(9) סקיצה :



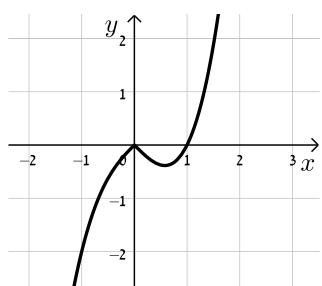
(12) סקיצה :



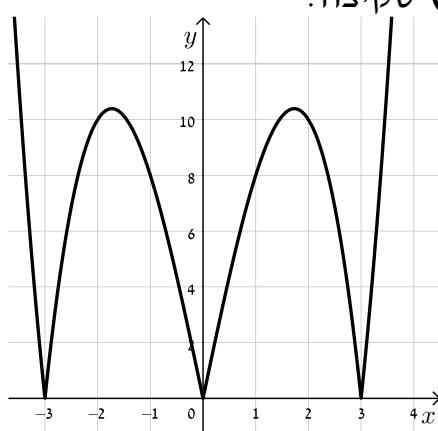
(11) סקיצה :



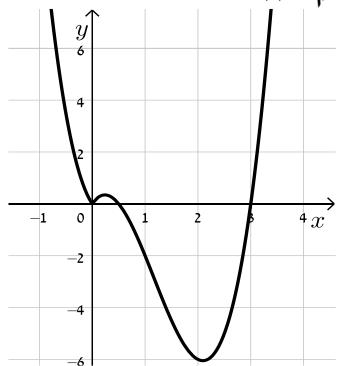
(14) סקיצה :



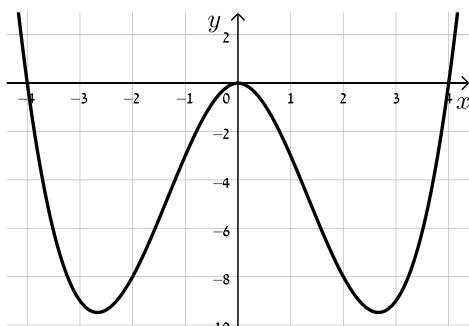
(13) סקיצה :



(16) סקיצה :



(15) סקיצה :





- 17) פתרו מלא בסרטון הוידאו.
- 18) פתרו מלא בסרטון הוידאו.
- 19) כן, מדובר באותה הפונקציה.
.(1,3) , (-1,3) , (3,5) , (-3.45,7.9) (20)
- ב. יהיה רק פתרו אחד והוא : .(3.5,11.25) , (-4,0) (21)
- . $a \leq -1$: פתרו ייחיד : $-1 < a < 1$ ו גם $a \neq 0$ מת.ה., אף פתרו : (22)

תחום הגדרה של פונקציות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כדי למצוא תחום הגדרה של פונקציה עם ערך מוחלט יש לוודא כי הערכים של המשתנה לא יוצרים ביטויים חסרי משמעות (כגון חלוקה באפס, או ערך שלילי בתוך שורש מעלה זוגית).

שאלות:

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$f(x) = \frac{|3-x|}{x-1} \quad (2)$$

$$f(x) = |x^2 - 1| + x + 3 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{|x|-2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{|x|-4} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{3}{2|\sin x|-1} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{|2x+1|-3}{\sqrt{4-|x|}} \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$(1) \text{ כל } x.$$

$$(2) \cdot x \neq 1$$

$$(3) \cdot x \neq 0, \pm 4$$

$$(4) \cdot x \geq 2, x \leq -2$$

$$(5) \cdot -4 < x < 4$$

$$(6) \cdot x \neq \frac{\pi}{6} + \pi k, x \neq \frac{5\pi}{6} + \pi k$$

גזרה של פונקציות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

נוצרת של פונקציה הערך המוחלט : $f(x) = |x|$ היא $f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

עבור פונקציה פנימית $f(x) = |g(x)|$ נוצר בכלל השרשרת :

$$f'(x) = \begin{cases} g(x) & g(x) > 0 \\ -g(x) & g(x) < 0 \end{cases}$$

הערה:

נסמן נקודת אפס של ביטויים עם ערך מוחלט ב- x_0 ונאמר כי אם ערך הנגזרת מימין ומשלא לנקודה זהה אז הפונקציה גזירה בנקודה x_0 , אחרת היא אינה גזירה בנקודה זו.

דוגמה:

לפונקציה : $f(x) = |x|$ יש נקודת אפס $x_0 = 0$ והנגזרת :

ערך הנגזרת הימני הוא $f'(x=0^+) = 1$ והשמאלי הוא $f'(x=0^-) = -1$

נאמר כי הפונקציה אינה גזירה ב- $(0,0)$.

שאלות:

גוזר את הפונקציות הבאות :

$$f(x) = x^3 + \frac{2}{3}|x| + 1 \quad (2)$$

$$f(x) = |x^2 - 3x + 2| \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{|x| + 2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{|x|}{x-1} \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{5-x}{\sqrt{|x|+6}} \quad (6)$$

$$f(x) = \sqrt{3x - |3-x|} \quad (5)$$

$$f(x) = \sqrt{3|x| - \cos x + 1} \quad (8)$$

$$f(x) = \sin|x| \quad (7)$$

9) מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה : $f(x) = x \cdot |x+2| + 3$ בנקודות :

. א. $x = -3$

. ב. $y = 3$

10) לפניך הפונקציה הבאה :

$$f(x) = \frac{x+|x|}{x+1}$$

א. הוכח כי הפונקציה מקיימת : $0 \leq f(x) < 2$ לכל x בתחום הגדרתה.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה : $x = 3$.

11) לפניך הפונקציה :

$$f(x) = \frac{3}{\sqrt{|2x+1|+x^2}}$$

א. הראה כי הפונקציה מוגדרת לכל x .

ב. מצא את הערך המירבי של הפונקציה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר בנקודות החיתוך

של הישר $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$ וגרף הפונקציה ברביע השני.

תשובות סופיות:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & x < 1, x > 2 \\ -2x+3 & 1 < x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + \frac{2}{3} & x > 0 \\ 3x^2 - \frac{2}{3} & x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-1)^2} & x > 0, x \neq 1 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x - 1}{(x+2)^2} & x > 0 \\ \frac{-x^2 + 4x + 1}{(-x+2)^2} & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

בנקודה $(3,3)$ הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4x-3}} & \frac{3}{4} < x < 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2x+3}} & x > 3 \end{cases} \quad (5)$$

בנקודה $\left(0, \frac{5}{\sqrt{6}}\right)$ הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x-17}{2(\sqrt{x+6})^3} & x > 0 \\ \frac{-x-7}{2(\sqrt{-x+6})^3} & x < 0 \end{cases} \quad (6)$$

בנקודה $(0,0)$ הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & x > 0 \\ -\cos x & x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

בנקודה $(0,0)$ הנגזרת לא קיימת.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3+\sin x}{2\sqrt{3x-\cos x+1}} & x > 0 \\ \frac{-3+\sin x}{2\sqrt{-3x-\cos x+1}} & x < 0 \end{cases} \quad (8)$$

9 א. הפונקציה גזירה רק בנקודה $(0,3)$ ולכן נמצא את

. $y = 2x + 3$: משוואת המשיק רק שם ונקבל :

10 א. הוכחה. . $y = \frac{1}{8}x + 1\frac{1}{8}$

11 א. הוכחה. . $y = \frac{3}{\sqrt{2}}x + 3\sqrt{2}$

חקירה של פונקציות עם ערכים מוחלטים:

סיכום כללי:

כדי לחקור פונקציה שמקילה ביטויים עם ערכים מוחלטים נבצע את פעולות החקירה הרגילות תוך תשומת לב לחלוקת הפונקציה למקטעים לפי ערכי המשטנה המאפשרים את הערכים המוחלטים.

- מציאת תחומי הגדרה של פונקציה.
- גזירה של פונקציה, מציאת נקודות אי-גזירות, וקבעת סוג הקיצון.
- כתיבת תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
- מציאת אסימפטוטות של גרף הפונקציה (במידה וישן).
- מציאת נקודות פיתול ותחומי קמירות לפני מעלה ומטה (במידה ונשאים).
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה תוך הקפה על נקודות אי רציפות, נקודות אי-גזירות וסימון מקטעים שונים על הגרף לפי המתבקש.

שאלות:

$$1) \text{ לפניך הפונקציה: } f(x) = x^3 - \frac{3}{4}|x| + 2.$$

- א. מה הן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- ב. כתוב את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
- ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$2) \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = |x^2 - 4| + |x^2 + x|.$$

- א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ב. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ג. נתון הישר $y = x + k$, k פרמטר. מצא לאלו ערכים של k :

 - .ii. הישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות.
 - .iii. הישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-3 נקודות שונות.
 - .iv. הישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-2 נקודות שונות.
 - .v. הישר לא יחתוך את גרף הפונקציה כלל.

3) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{|x-2|}$.

- כתוב את הנגזרת של הפונקציה והוכיח כי אין לפונקציה נקודות קיצון.
- כתוב את תחומי העליה והירידה של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גраф הפונקציה.

4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{|x|+a}$, a פרמטר.

ידעו כי הפונקציה אינה מוגדרת בתחום: $-1 < x < 1$.

- מצא את a .
- הוכח כי הפונקציה היא זוגית.
- הראה כי הפונקציה עולה בתחום: $x > 1$.
- סרטט סקיצה של גраф הפונקציה בתחום $0 < x < 9$.
- היעזר במציאץ מהסעיפים הקודמים והוסף לסקיצה שציירת את גраф הפונקציה בתחום: $-9 < x < 0$.

5) נתונה הפונקציה: $f(x) = |\cos x| + \cos 2x$.

- הוכח כי הפונקציה היא זוגית.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום $[\pi : 0]$ וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גраф הפונקציה בתחום: $[\pi : 0]$.
- סרטט סקיצה של גраф הפונקציה בתחום: $[-\pi : 0]$.

6) נתונות שתי פונקציות: $g(x) = \frac{x}{|x|}$, $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

- הוכח כי $f(x)$ הינה פונקציה זוגית וכי $g(x)$ הינה פונקציה אי-זוגית.
- סרטט סקיצה של גраф הפונקציה $f(x)$ בתחום $\pi \leq x \leq 0$.
- הסתמך על למציאץ מהסעיפים הקודמים וסרטט סקיצה של גراف הפונקציה: $f(x) \cdot g(x)$ בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

תשובות סופיות:

. $0 < x < \frac{1}{2}$, $x < 0$, $x > \frac{1}{2}$: ב. עולה יורדת : $\max(0, 2)$, $\min\left(\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}\right)$ (1) א.

ג. עיין סקיצה.

. $k < 4$.v $k = 4$.iv $k > 4.5$.iii $k = 4.5$.ii $4 < k < 4.5$.i (2) א. $\min(-2, 2)$, $\max\left(-\frac{1}{4}, 4\frac{1}{8}\right)$, $\min(0, 4)$

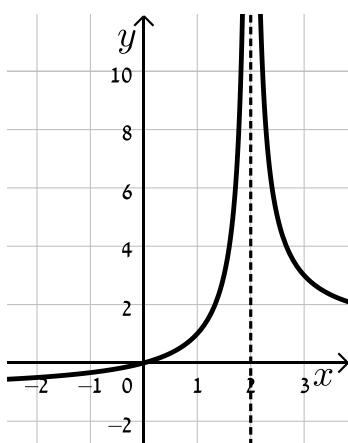
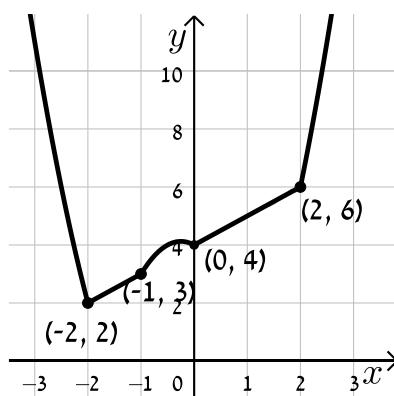
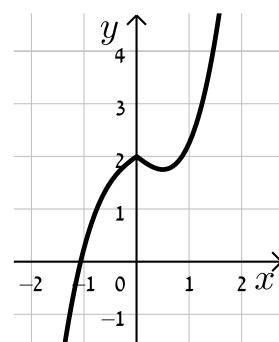
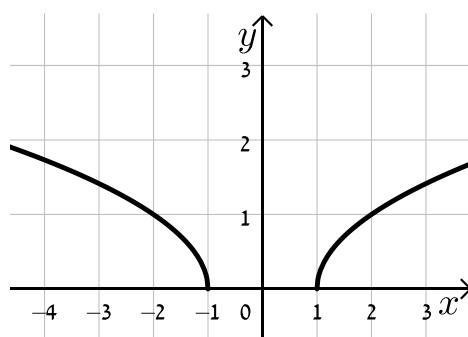
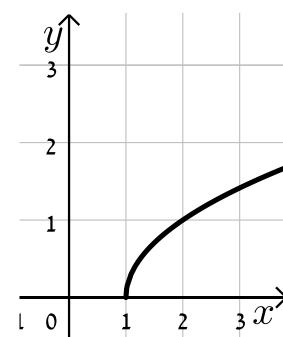
ג. עיין סקיצה.

(3) א. הוכחה. ב. עולה : $x < 2$, יורדת : $x > 2$. (4) א. $a = -1$

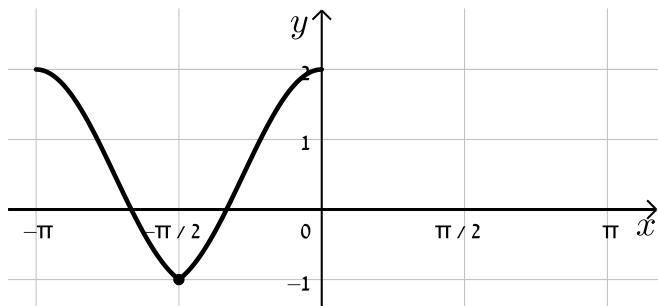
ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. עיין סקיצה. (5) א. הוכחה. ב. $\max(0, 2)$, $\min\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$, $\max(\pi, 2)$

ד. עיין סקיצה.

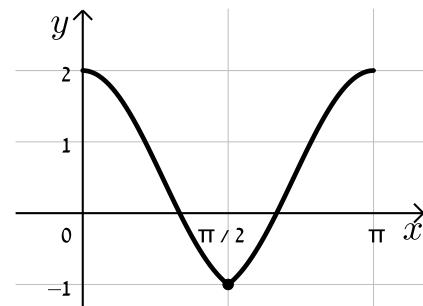
ג. עיין סקיצה. (6) א. הוכחה. ב. עיין סקיצה. ג. עיין סקיצה.

סקיצות לשאלות החקירה:**שאלה 3****שאלה 2****שאלה 1****שאלה 4 סעיף ה****שאלה 4 סעיף ז**

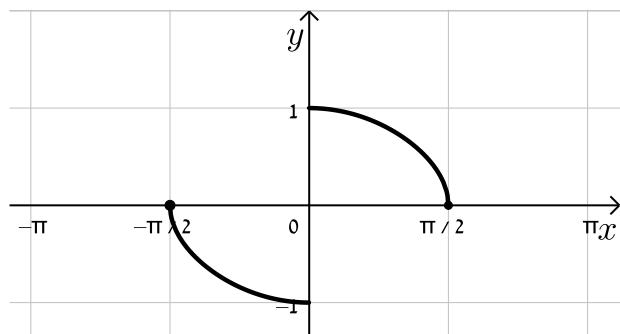
שאלה 5 סעיף ד



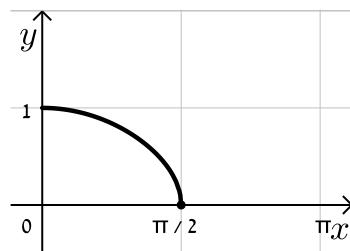
שאלה 5 סעיף ג



שאלה 6 סעיף ג



שאלה 6 סעיף ב



פתרונות וחקירה של משוואות עם ערך מוחלט:

סיכום כללי:

כדי לחקור משוואות המכילות פרמטר וביטויים עם ערך מוחלט, יש להפריד את המשווהה לתחתי-משוואות, לפי כל תחום של המשתנה עבורו סימן הערך המוחלט הוא חיובי או שלילי. לאחר מכן יש לפתור כל משוואה בנפרד ולאחד את הפתרונות.

שאלות:

1) עבור אילו ערכים של m יש למשווהה $|x^2 - 2x - 3| = m - 1$ שלושה פתרונות?

2) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = |x^2 - x - 2| + x|x|$

א. ציר את גרף הפונקציה במערכת צירים.

ב. מצא עבור אילו ערכי k יש למשווהה $|x^2 - 2x - 3| + k = x - x|x| - 1$ פתרון אחד בלבד.

3) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{|x-3|}{x^2-9} + \frac{x-3}{|x-3|}$

א. סרטט את הפונקציה במערכת צירים (זכור לשפט תחיליה).

ב. מצא לאלו ערכים של a יהיה למשווהה $f(x) = a$ פתרון אחד בלבד.

4) לפניך הפונקציה: $y = f(x) = |x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5|$ והישר: $m = y$

א. סרטט גרף של $f(x)$ במערכת צירים.

ב. מצא את התחומים של m עבורם הישר $m = y$ יהיה יותר משתי נקודות

חיתוך שונות עם גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובות סופיות:

. $m = 5$ (1)

2) א. ראה סרטוט בסרטון הוידאו. ב. $-1 = k$.

3) א. ראה סרטוט בסרטון הוידאו. ב. $a < -\frac{7}{6}$, $-1 < a \leq 1$, $a \geq \frac{7}{6}$.

. $3 \leq m \leq 5$ (4)